

Forgásparaboloid-héj frekvenciaanalízise

Dr. Hegedűs István - Dr. Huszár Zsolt

Lapos forgásparaboloidhéj frekvenciaanalízise

- **Célkitűzések**
- **Szakirodalmi háttér**
- **Forgásparaboloid-héj vizsgálata nyírési alakváltozás figyelembevétele nélkül**
 - A differenciálegyenlet
 - Megoldás képzőfüggvényes eljárással
 - Rezgési alakok
 - Parametrikus vizsgálatok eredményei
- **Forgásparaboloid-héj vizsgálata a nyírési alakváltozás figyelembevételével**
 - A differenciálegyenlet megoldása képzőfüggvényes eljárással
 - Parametrikus vizsgálatok eredményei
- **Az eredmények összefoglalása**

Célkitűzések

Ebben a kutatásban célkitűzéseink a következők voltak:

- **Új analitikus eljárás kidolgozása a lapos forgásparaboloid- ill. zárt gömsüveghéjak rezgését leíró differenciálegyenlet-rendszer megoldására:**
 - nyírási alakváltozások nélkül,
 - nyírási alakváltozások figyelembevételével.
- **A frekvenciaegyenlet előállítása.**
- **Ennek megoldására számítási algoritmus és program kidolgozása (MATLAB).**
- **Az analitikus számítás eredményeinek ellenőrzése alternatív számítási eljárással, az ANSYS végelem programmal.**

Szakirodalmi háttér

Felületszerkezetek, általános héjelmélet, hajlított lapos héjak

Girkmann, K. (1954): „Flächentragwerke”;

Bölcskei, E. és Orosz, Á (1973): „Héjak”;

Flügge, W. (1973): „Stresses in Shells”;

Soedel, W. (1986): „Vibration of shells and plates”;

Hegedűs, I. (2000): „Héjszerkezetek”;

Az utóbbi évtizedben a héjszerkezetek rezgéseivel kapcsolatban:

Shang, Xin-Chun (2001): „An Exact Analysis for Free Vibration of a Composite Shell Structure Hermetic Capsule”.

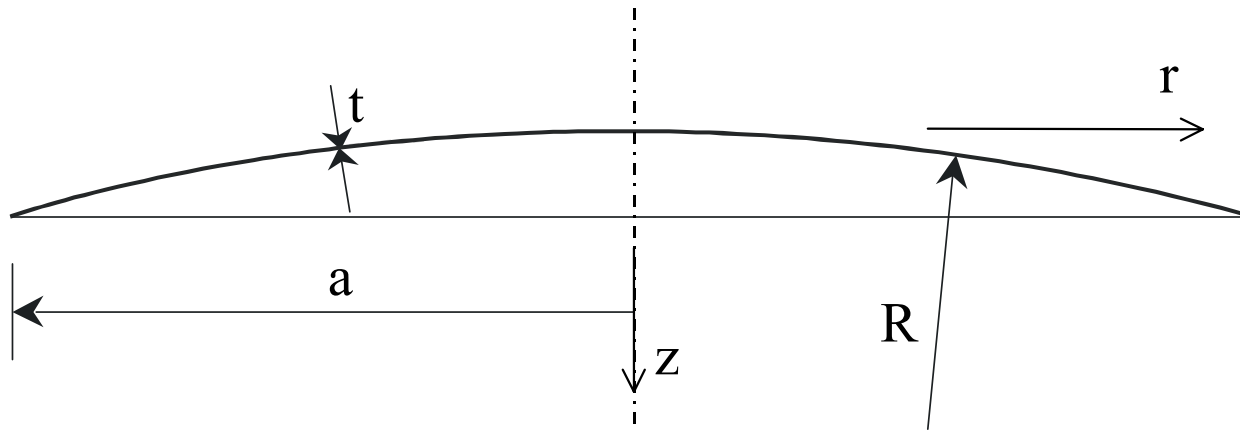
Kabir, H. R. H. (2002): “Application of linear shallow shell theory of Reissner to frequency response of thin cylindrical panels with arbitrary lamination”.

Altekin, M. and Yükseler R. F. (2008): „A Parametric Study on Geometrically Nonlinear Analysis of Initially Imperfect Shallow Spherical Shells”.

Touse, C. at al. (2008): „Effect of Imperfections and Damping on the Type of Nonlinearity of Circular Plates and Shallow Spherical Shells”.

Forgásparaboloid-héj vizsgálata nyírási alakváltozás nélkül

A vizsgált felület henger-koordináta rendszerben a $z = \frac{r^2}{2R}$ egyenlettel írható le.



Lehetséges alkalmazása: az űrben szabadon lebegő tányérantenna.

A megoldásnál a következő alapfeltevések vannak érvényben:

- a héj lapos és vékony,
- anyaga rugalmas és izotróp,
- a lehajlások kicsinyek és a középfelületre merőlegesek,
- a forgási tehetetlenségtől eltekintünk.

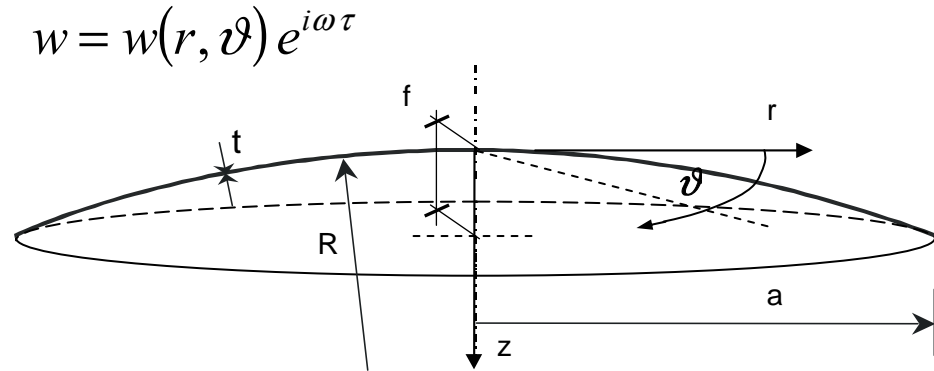
A rezgés parciális differenciálegyenlet-rendszere:

egyensúlyi:

$$K\Delta\Delta w - \frac{1}{R}\Delta F = -\rho t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}$$

kompatibilitási:

$$\frac{1}{Et}\Delta\Delta F + \frac{1}{R}\Delta w = 0$$



A szabadon lebegő szerkezetre 4 peremfeltétel adható meg az $r = a$ sugarú peremkörön. Ezek polárkoordináta-rendszerben:

A radiális membránérő, a csúsztatóerő null-értékűsége alapján:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) + \frac{K(1-\nu)}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) = 0$$

A radiális hajlító-, a csavarónyomaték és a nyíróerő nullértékűsége alapján:

$$-K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right) \right] = 0$$

$$-K \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) - \frac{K(1-\nu)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) = 0$$

Frekvenciaanalízis: differenciál-egyenletrendszer sajátértékfeladat

A megoldáshoz használt *képzőfüggvényes eljárás* alapelve:

- A lineáris diff. egyenletrendszer átalakítása egyetlen ismeretlen függvényt (a képzőfüggvényt) tartalmazó egyenletté.
- Ennek megoldása után az eredeti egyenletrendszer ismeretlen függvényei a képzőfüggvény deriváltjaiként határozhatók meg.

Adott a következő lineáris diff. egyenletrendszer: $\Theta \mathbf{y} = \mathbf{0}$

Ennek **operátormátrixa**: $\Theta = [\theta_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$

- determinánsa: **$\det(\Theta)$**

- az előjeles
aldeterminánsai: $\det(\Theta)_{ij}$ $i, j = 1, \dots, n$

- adjungáltja: **$\text{adj}(\Theta) = [\det(\Theta)_{ji}]$** $i, j = 1, \dots, n.$

Állítás: ha H olyan függvény, mely kielégíti a karakterisztikus diff.egyenletet:

$$\det(\Theta)\{H\} = 0 \quad (1)$$

($\text{adj}(\Theta)$ k -adik oszlopa)

akkor a H (képző)függvénnyel képezhető a

$$\Theta y = 0$$

y megoldásvektorának $y^{(i)}$ elemei:

$$\begin{bmatrix} \det(\Theta)_{1k} \\ \det(\Theta)_{2k} \\ \dots \\ \det(\Theta)_{nk} \end{bmatrix} \{H\} = y^{(i)} \quad (2)$$

$i=1, 2, \dots, n$

Bizonyítás (indirekt):

Ha (2) igaz, akkor az eredeti lineáris diff. egyenletrendszer:

$$\Theta y = \Theta \begin{bmatrix} \det(\Theta)_{1k} \\ \det(\Theta)_{2k} \\ \dots \\ \det(\Theta)_{nk} \end{bmatrix} \{H\} = 0$$

A determinánsok kifejtési tétele alapján:

ha $k \neq i$ akkor $\sum_{j=1}^n \theta_{ij} \det(\Theta)_{kj} \equiv 0.$

ha $k = i$ akkor $\sum_{j=1}^n \theta_{ij} \det(\Theta)_{ij} = \det(\Theta),$

azaz (1) mindenképpen teljesül!

A képzőfüggvényes eljárás előnye általában:

- a) A lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer egyetlen ismeretlen függvényt a *képzőfüggvényt* tartalmazó egyenletté alakítható.
- b) Ennek megoldása után az eredeti egyenletrendszer ismeretlen függvényei a képző-függvény deriváltjaiként határozhatók meg.

Alkalmazás a forgásparaboloid-héj rezgési problémájára. Lépések:

❖ Karakterisztikus differenciálegyenlet előállítás

A τ időváltozó leválasztása után:

$$\Theta \begin{bmatrix} w \\ F \end{bmatrix} = 0 \quad \text{diff. egyenletrendszer operátormátrixa:} \quad \Theta = \begin{bmatrix} K\Delta\Delta - \rho t\omega^2 & -\frac{1}{R}\Delta \\ \frac{1}{R}\Delta & \frac{1}{Et}\Delta\Delta \end{bmatrix}$$

Az operátormátrix determinánása:
$$\det(\Theta) = \frac{K}{Et} \Delta\Delta\Delta\Delta + \left(\frac{1}{R^2} - \frac{\rho\omega^2}{E} \right) \Delta\Delta$$

Bevezetve a H képzőfüggvényt és alkalmazva H -ra a $\det(\theta)$ operációt:

$$\det(\Theta)\{H\} = 0 \quad \text{a karakterisztikus differenciálegyenlet.}$$

❖ **A karakterisztikus differenciálegyenlet megoldását keressük**

a sugárirányú és a gyűrűirányú változók szétválasztásával polárkoordinátás alakban:

$$H_k(r, \vartheta) = A_k(r) \cos k\vartheta \quad \text{ahol: } k \text{ a gyűrűirányú hullámszám}$$

❖ **A képzőfüggvényre kapott megoldás** (hatvány- és Bessel függvények):

Zárt gömbsüveg: csak 4 megoldásfüggvény összhangban a 4 permfeltétellel!

$$H_k = \left[C_{1k} \xi_k^k + C_{2k} \xi_k^{k+2} + C_{5k} J_k(\xi_k) + C_{6k} I_k(\xi_k) \right] \cos k\vartheta$$

ahol: $\xi_k = \frac{r}{l_k}$ és $l_k = \left(\frac{\rho \omega^2}{K} - \frac{Et}{KR^2} \right)^{-\frac{1}{4}}$ a lengési karakterisztikus hossz.

$\cos k\vartheta$ a gyűrűirányú viselkedést jeleníti meg.

- ❖ **A lehajlás- és a feszültségfüggvény előállítása H_k -ből**
az adjungált operátormátrix transzponáltjának második sorával:

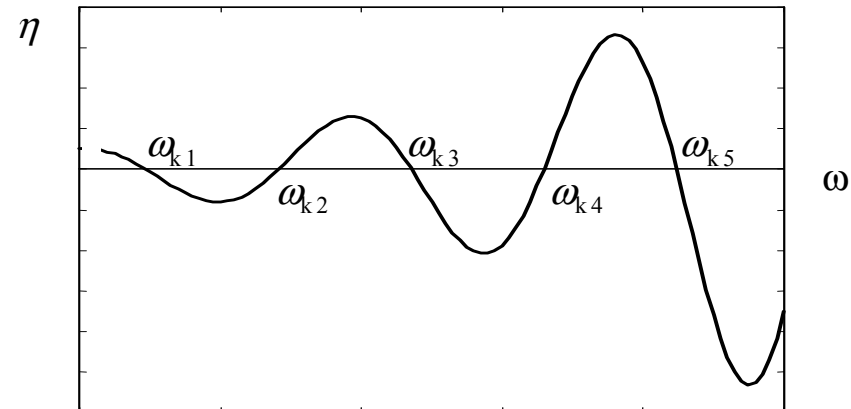
$$\text{Adj}(\Theta)' = \begin{bmatrix} \frac{1}{Et} \Delta \Delta & -\frac{1}{R} \Delta \\ \frac{1}{R} \Delta & K \Delta \Delta - (\rho t \omega^2) \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{R} \Delta \{H_k\} = \frac{1}{R l_k^2} [4C_2(k+1)\xi_k^k - C_5 J_k(\xi_k) + C_6 I_k(\xi_k)] \cos k\vartheta$$

$$F = K \left[\Delta \Delta - \frac{1}{l_\omega^4} \right] \{H_k\} = K \left[-\frac{1}{l_\omega^4} (C_1 \xi_k^k + C_2 \xi_k^{k+2}) + \left(\frac{1}{l_k^4} - \frac{1}{l_\omega^4} \right) (C_5 J_k(\xi_k) + C_6 I_k(\xi_k)) \right] \cos k\vartheta$$

A w és F megoldásokat a peremfeltételi egyenletrendszerbe helyettesítve a determináns zérushelyei a megoldások:

$$\eta = \det \{ D[\xi_k(\omega_k)] \}$$



A sajátértékek azok a $\xi_k = \alpha_k = \frac{a}{l_k(\omega_k)}$ értékek, melyek a D determinánst zérussá teszik.

A forgásparaboloid-héj frekvenciaegyenlete

$$\det(D(\alpha_k(\omega_k))) = 0$$

ahol:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}$$

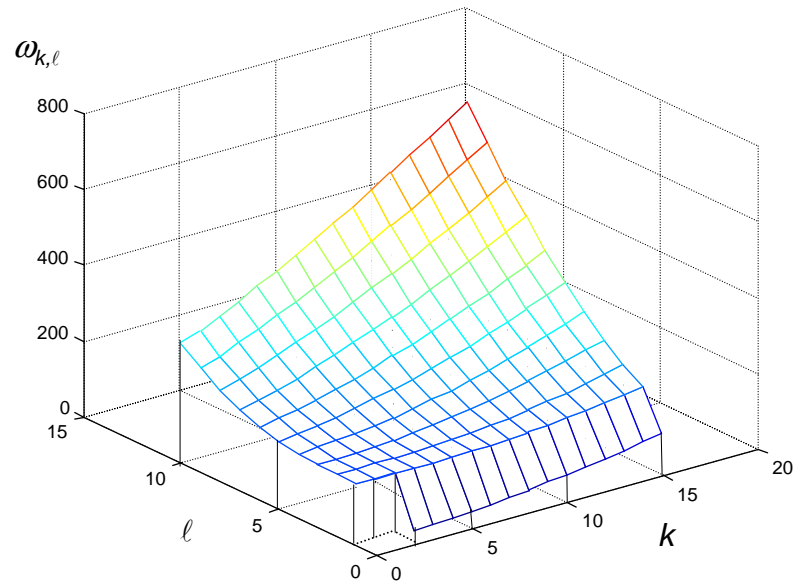
gyökök minden k -hoz: $\ell = 1, 2, \dots$

Sajátkörfrekvenciák:

$$\omega_{k\ell} = \sqrt{\frac{\alpha_{k\ell}^4 E t^2}{a^4 12(1-\nu^2)\rho} + \frac{E}{\rho R^2}}$$

k : sugárirányú csomóvonalszám

ℓ : gyűrűirányú csomóvonalszám



A héj $\ell = 0$ móduszi esetén az alacsonyabb k -khoz tartozó $\alpha_{k,0}$ sajátértékek és l_k lengési karakterisztikus hosszak komplexek. Akkor válnak valósra, ha a hozzájuk tartozó sajátkörfrekvencia értéke meghaladja az

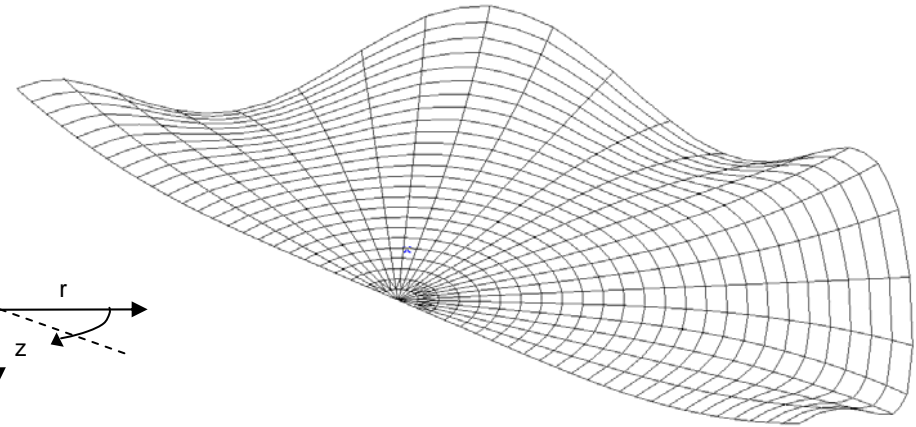
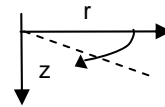
$$\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ értéket.}$$

Jellegzetes rezgési elmozdulási alakok

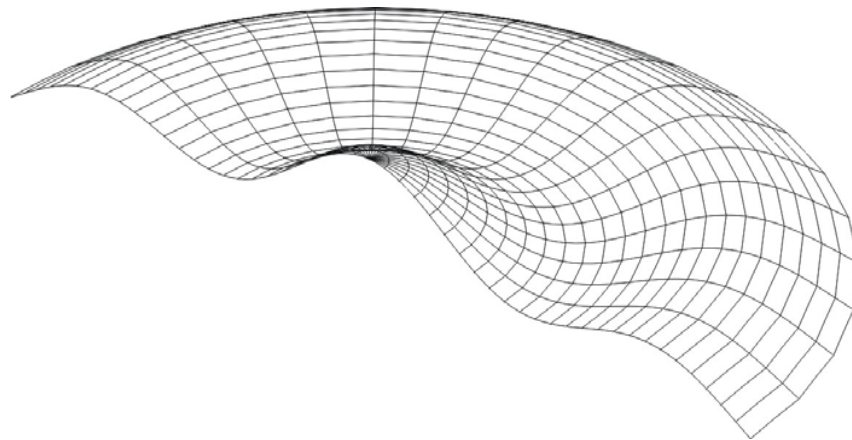
paramétereik:

k : sugárirányú csomóvonalszám

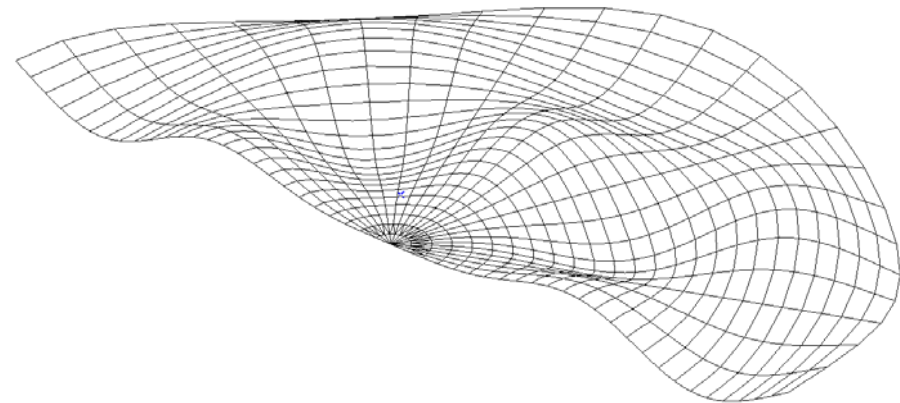
ℓ : gyűrűirányú csomóvonalszám



a) alak $\ell = 0$ és $k = 6$ paraméterre



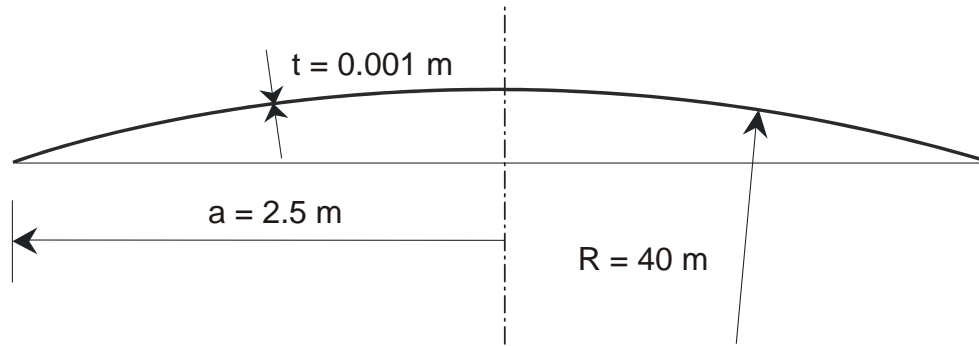
b) alak $\ell = 3$ és $k = 0$ paraméterre



c) alak $\ell = 2$ és $k = 4$ paraméterre

Szerkezetek rezgési jellemzőinek összehasonlítása

A vizsgált forgásparaboloid-héj geometriai adatai és anyagjellemzői



*Szerkezeti anyag
alumínium ötvözet:*

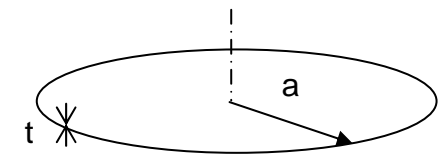
$$E = 70 \text{ kN/mm}^2$$

$$\gamma = 2700 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = 1/3$$

A forgásparaboloid-héjból származtatott:

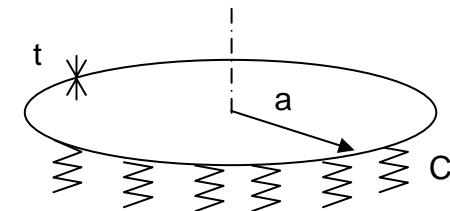
1. Szabadon lebegő körlemez $K\Delta\Delta w + \rho t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0$
 $R = \infty$



2. Rugalmasan ágyazott körlemez

$$K\Delta\Delta w + Cw + \rho t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0$$

a helyettesítő
ágyazási merevség : $C = \frac{Et}{R^2}$



Forgásparaboloid-héj $\alpha_{k\ell}$ sajátértékei

	$k = 0$	1	2	3	4	5	10	15
$\ell = 0$	-	-	15.97+ 15.97·i	15.97+ 15.97·i	15.96+ 15.96·i	15.95+ 15.95·i	15.66+ 15.66·i	14.44+ 14.44·i
1	3.01	4.53	5.93	7.26	8.54	9.78	15.67	21.35
2	6.21	7.74	9.19	10.58	11.93	13.24	19.50	25.48
10	31.40	32.96	34.49	35.99	37.48	38.95	46.06	52.89

Forgásparaboloid-héj $\omega_{k,l}$ sajátkörfrekvenciái [Hz].

	$k = 0$	1	2	3	4	5	10	15
$\ell = 0$	merevtestszerű mozgás	-	1.39	3.37	6.06	9.44	35.17	73.24
1	127.31	127.40	127.60	127.97	128.59	129.51	141.25	170.64
2	127.66	128.17	129.02	130.32	132.14	134.59	158.76	205.97
10	276.89	299.31	321.48	347.30	372.78	399.19	544.24	709.25

Megállapítható, hogy a forgásparaboloid-héj gyűrűirányú csomóvonalat nem tartalmazó rezgéseinek sajátfrekvenciái az ágyazatlan körlemezzel, míg az egy vagy több gyűrűirányú csomóvonalat tartalmazó rezgések frekvenciái a rugalmas ágyazású körlemezzel közelíthetők. Hasonló következtetésre jutott végeeselemes számítással Pluzsik (2000).

Frekvenciaanalízis a nyírási alakváltozások figyelembevételével

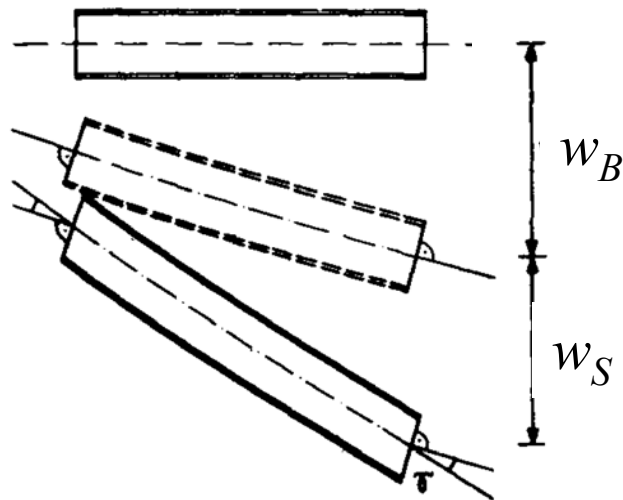
A w lehajlás függvény felbontása hajlítási w_B és nyírási w_S összetevőre:

$$w = w_B + w_S$$

$$\text{ahol: } w_S = -\frac{K}{S} \Delta w_B$$

K a hajlítási,

S a nyírási merevség.



A héj szabad rezgéseit leíró differenciálegyenlet-rendszer, kiegészítve a w_B és w_S közötti kapcsolattal:

$$\begin{array}{l}
 \text{Egyensúlyi} \\
 \text{Kompatibilitási}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \rightarrow \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 K\Delta\Delta - \rho t \omega^2 & -\rho t \omega^2 & -\frac{1}{R} \Delta \\
 \frac{1}{R} \Delta & \frac{1}{R} \Delta & \frac{1}{Et} \Delta\Delta \\
 K\Delta\Delta & S\Delta & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 w_B \\
 w_S \\
 F
 \end{bmatrix}
 = \underline{\underline{0}}$$

A nyírási és hajlítási elmozdulás összefüggése

A képzőfüggvényes módszer a nyírt forgásparaboloidhéj sajátfrekvenciáinak meghatározására

az operátor determinánsa, karakterisztikus egyenlet:

$$\frac{KS}{Et} \Delta \Delta \Delta \left[\Delta \Delta - \left(\frac{\rho t \omega^2}{S} - \frac{Et}{SR^2} \right) \Delta - \left(\frac{\rho t \omega^2}{K} - \frac{Et}{KR^2} \right) \right] H_k = 0$$

Δ leválasztható (az operátor-mátrix elemeinek legnagyobb közös osztója):

szorzattá alakítva:
$$\frac{KS}{Et} \Delta \Delta \left[\Delta + \frac{1}{l_1^2} \right] \cdot \left[\Delta - \frac{1}{l_2^2} \right] H_k = 0$$

az l_1 és l_2 hosszak

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{K^2}{4l_k^8 S^2} + \frac{1}{l_k^4}} + \frac{K}{2l_k^4 S}}} \quad l_2 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{K^2}{4l_k^8 S^2} + \frac{1}{l_k^4}} - \frac{K}{2l_k^4 S}}}$$

A képzőfüggvény:

$$H_k = \left[C_{1k} \left(\frac{r}{l_k} \right)^k + C_{2k} \left(\frac{r}{l_k} \right)^{k+2} + C_{5k} J_k \left(\frac{r}{l_1} \right) + C_{6k} I_k \left(\frac{r}{l_2} \right) \right] \cos k\vartheta$$

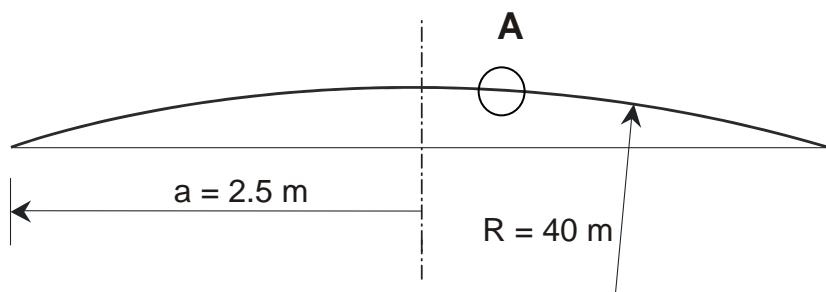
Ennek alapján a megoldások (az adjungált második sorával)

$$w_B = -\frac{1}{R} \Delta H_k$$

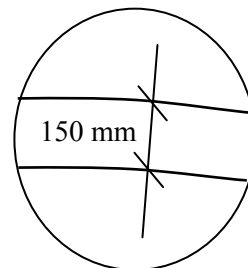
$$w_S = \frac{K}{SR} \Delta \Delta H_k$$

$$F = K \left(\frac{1}{l_\omega^4} - \frac{K}{Sl_\omega^4} \Delta - \Delta \Delta \right) H_k$$

A vizsgált vastag héj



„A” részlet



Alumínium ötvözet

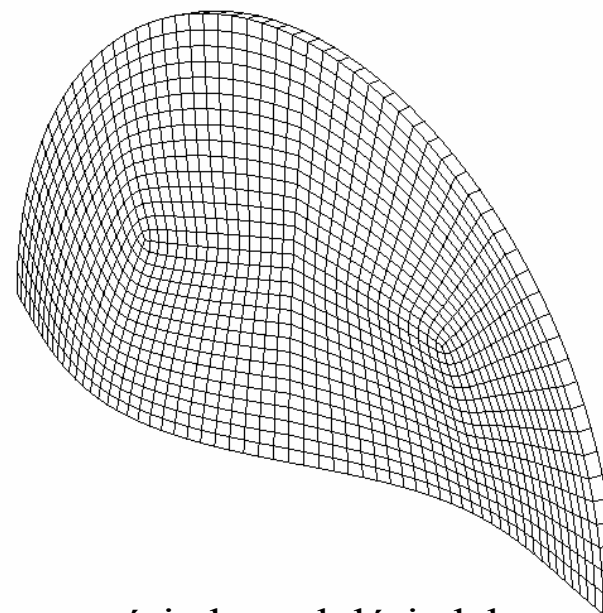
$$E = 70 \text{ kN/mm}^2$$

$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = 1/3$$

Sajátfrekvenciák

k	ℓ	Analitikus nyírás Nélkül [Hz]	Analitikus nyírással [Hz]	Ansys [Hz]
2	0	196,60	196,39	195,48
0	1	362,61	361,92	360,41
0	2	1446,47	1428,41	1418,39
0	3	3287,94	3189,73	3149,89



rezgési elmozdulási alak
 $\ell = 1$ és $k = 1$ esetén

AZ EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA

1. **A lapos héjak elmélete alapján, új analitikus módszerrel – az egyéb célra már alkalmazott képzőfüggvényes eljárással – megoldottuk a nyírási alakváltozásoktól mentes vékony, lapos, szabad peremű forgásparaboloid-héj ill. gömbsüveghéj rezgésének differenciálegyenlet-rendszerét.** E módszer lényege, hogy a héj rezgéseit leíró parciális differenciálegyenlet-rendszert, az operátormátrix determinánsának és adjungáltjának értelmezésén alapuló képzőfüggvényes eljárás alkalmazásával, redukáltam egy közöségi nyolcadrendű differenciálegyenletre.
2. **Az így előállított frekvenciaegyenlet alkalmas a vékony, lapos, szabadperemű forgásparaboloid-héj valamennyi saját-frekvenciájának és rezgési alakjának analitikus meghatározására.**
3. **Megmutattuk, hogy a forgásparaboloid-héj gyűrűirányú csomóvonalat nem tartalmazó ($\ell = 0$) móduszai esetén az alacsonyabb k gyűrűirányú hullámszámú móduszokhoz tartozó $\alpha_{k,0}$ sajátértékek és l_k lengési karakterisztikus hosszak komplexek, melyek akkor válnak valósra, ha a hozzájuk tartozó sajátkörfrekvencia értéke meghaladja az $\omega_o = c/R$ körfrekvencia értéket (ahol: c a hullámterjedés sebessége a héj anyagában, R a forgásparaboloidhoz a tetőpontjában simuló gömb sugara).**
4. **A képzőfüggvényes eljárással levezettük a nyírási alakváltozások figyelembevétele mellett is, a lapos szabadperemű forgásparaboloid-héj frekvenciaegyenletét.**

*KÖSZÖNÖM A
FIGYELMET!*